PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Problema (7puntos): Sea A un conjunto de números enteros. El *conjunto suma* de A, que denotaremos por $A+A$, se define como el conjunto formado por todas las sumas de pares de elementos de A. Por ejemplo, si $A=\{0, 2\}$, el conjunto suma se obtiene calculando $0+0$, $0+2$, $2+0$, $2+2$ y, por lo tanto, $A+A=\{0, 2, 4\}$. Recordad que una progresión aritmética de longitud k es un conjunto de k n úmeros

$$\{a, a+d, \ldots, a+(k-1)d\}.$$

En este caso se dice que d es la *diferencia* de la progresión aritmética.

(1) Hallad $A+A$ en los casos siguientes:

$$A=\{0,1,3,7,15\} \text{ y } A=\{3,10,17,24,31\}.$$

(2) Sea A una progresión aritmética de longitud k. Hallad $A+A$ y verificad que tiene $2k-1$ elementos.

Queremos relacionar el número de elementos de A con el número de elementos de $A+A$.

(3) Sea A un conjunto con k elementos. Justificad que el número de elementos de $A+A$ es como mucho $\binom{k}{2}+k$, y como mínimo es k.

El valor mínimo obtenido en el apartado anterior puede mejorarse sustancialmente:

(4) Explicad que si el número de elementos de A es igual a k, entonces el número de elementos de $A+A$ és mayor o igual que $2k-1$ (*Indicación:* denotad $A=\{a_1, \ldots, a_k\}$ con $a_1<\cdots<a_k$. Intentad construir $2k-1$ números distintos que sean elementos del conjunto suma).

(5) Comprobad que si $A+A$ tiene $2k-1$ elementos, entonces A es una progresión aritmética de longitud k.

(6) Considerad A y B conjuntos, donde A y B tienen k elementos. Sea el conjunto suma $A+B=\{a+b, \text{ donde } a\in A,\ b\in B\}$. Justificad que si el número de elementos de $A+B$ es igual a $2k-1$, entonces A y B son progresiones aritméticas de longitud k con la misma diferencia.

Problema (3puntos): Denotemos la *parte entera* y la *parte decimal* de un número positivo x por $[x]$ y $\{x\}$ respectivamente. Por ejemplo, la parte entera y decimal del número $3,247$ son, respectivamente, $[3,247]=3$ y $\{3,247\}=0,247$.

Calculad las integrales

$$\int_3^6 [x]+\sqrt{\{x\}}\,dx,\ \int_3^6 \{x\}+\sqrt{[x]}\,dx.$$

PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Problema (7puntos): Para cada $n \geq 0$ entero y $x \in [-1, 1]$ consideramos la función

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

(1) Justificad que $T_0(x) = 1$, $T_1(x) = x$ y $T_2(x) = 2x^2 - 1$.

(2) Usando relaciones trigonométricas, justificad que se cumple, para todo $n \geq 0$, la relación de recurrencia

$$T_{n+2}(x) - 2xT_{n+1}(x) + T_n(x) = 0.$$

Usadla para calcular los polinomios $T_3(x)$, $T_4(x)$ i $T_5(x)$.

(3) Explicad que, para cada $n \geq 0$, la función T_n es un polinomio de grado n.

Los polinomios T_n que hemos obtenido se llaman *polinomios de Txebixev*:

(5) Obtened las igualdades: $T_n(1) = 1$, $T_n(-1) = (-1)^n$, $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$. Hallar $T_n(0)$.

(6) ¿Cuánto valen $T_n'(1)$ y $T_n''(1)$?

(7) Demostrad que si $m \neq n$, entonces se cumple:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = 0$$

¿Cuánto vale la integral si $m = n = 0$? ¿Y si $m = n$ pero son distintos de 0?

Problema (3puntos): con un filamento construimos un triángulo equilátero de lado ℓ. Apoyamos este triángulo sobre una esfera maciza de radio r, de tal forma que dicha esfera no pasa por el interior del tri ángulo.

(1) ¿Qué relación debe verificar r y ℓ para que la anterior condición se cumpla?

(2) ¿Cuál es la distancia entre el centro de la esfera y cualquiera de los vértices del triángulo?

(3) Determinad la distancia del centro de la esfera al plano que define el triángulo.

PRUEBA DE ACCESO AL CFIS - EJEMPLOS DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Problema (10 puntos):

Un *cuaternión* $\mathbf{q}$ es una expresión del tipo

$$\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$$

donde a, b, c y d son números reales e $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son símbolos con las siguientes propiedades operacionales:

$$\mathbf{i}^2 = -1,\ \mathbf{j}^2 = -1,\ \mathbf{k}^2 = -1,\ \mathbf{ijk} = -1$$

(1) De las propiedades anteriores se deducen las siguientes: $\mathbf{ij} = \mathbf{k}$, $\mathbf{jk} = \mathbf{i}$, $\mathbf{ki} = \mathbf{j}$, $\mathbf{ji} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{kj} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{ik} = -\mathbf{j}$. Mostrad cómo se deducen la primera, la segunda y la cuarta.

Los cuaterniones se pueden sumar, componente a componente, y multiplicarse entre ellos utilizando la propiedad distributiva y las operaciones con los símbolos $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ descritas más arriba. Este producto es asociativo, pero observad que no es conmutativo, en general $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 \neq \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1$.

(2) Calculad $(1 + 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k})(1 + \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.

Si $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$ es un cuaternión:

- Diremos que $\mathbf{q} = 0$ si i solo si $a = b = c = d = 0$.
- Denominaremos la *parte real* y la *parte imaginaria* de $\mathbf{q}$, respectivamente, a $Re(\mathbf{q}) = a$ y a $Im(\mathbf{q}) = b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$. Diremos que $\mathbf{q}$ és *real* si su parte imaginaria es 0; en caso contrario, diremos que $\mathbf{q}$ es *no real*. Diremos que $\mathbf{q}$ es *imaginario* si su parte real es 0.
- Llamaremos el *conjugado* de $\mathbf{q}$ al cuaternión $\overline{\mathbf{q}} = a - b\mathbf{i} - c\mathbf{j} - d\mathbf{k}$.
- Llamaremos *módulo* de $\mathbf{q}$ a $\|\mathbf{q}\| = +\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

(3) Demostrad que $\mathbf{q}\overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{q}}\mathbf{q} = \|\mathbf{q}\|^2$. Deducid que si $\mathbf{q} \neq 0$, entonces tiene inverso, es decir, existe un cuaternión que denotaremos por $\mathbf{q}^{-1}$ (ó $\frac{1}{\mathbf{q}}$) tal que $\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1$ y escribid la expresión explícita de $\mathbf{q}^{-1}$.

(4) Encontrad el cuaternión $\mathbf{q}$ que verifica la siguiente ecuación:

$$(1 - 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k})\,\mathbf{q}\,(1 - \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) - 1 = 0$$

En el siguiente apartado queremos deducir cuándo dos cuaterniones conmutan, es decir, cuándo $\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2 = \mathbf{q}_2\mathbf{q}_1$. Si $\mathbf{q}_1$ es *real*, conmuta con cualquier otro (no es necesario que lo comprobéis).

(5) Sean $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ cuaterniones *no reales*; demostrad que conmutan si y solo si sus partes imaginarias son proporcionales (es decir, si existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Im(\mathbf{q}_1) = \lambda Im(\mathbf{q}_2)$).

En los últimos apartados queremos calcular cuántas raíces tienen algunos cuaterniones. Mantenemos la notación $\mathbf{q} = a + b\mathbf{i} + c\mathbf{j} + d\mathbf{k}$.

(6) Calculad $\mathbf{q}^2$. Encontrad los $\mathbf{q}$ tales que $\mathbf{q}^2 = 1$. Describid todos los $\mathbf{q}$ tales que $\mathbf{q}^2 = -1$; ¿cuántos hay? Dad explícitamente cuatro que no sean múltiplos reales unos de otros.

(7) Si $\mathbf{w} = m + n\mathbf{i} + r\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ es un cuaternión fijado, discutid cuántos cuaterniones $\mathbf{q}$ verifican $\mathbf{q}^2 = \mathbf{w}$ (*Indicación*: distinguid los casos cuando $\mathbf{w}$ es un cuaternión *real* positivo, *real* negativo y *no real*). Encontrad las raíces cuadradas de $\mathbf{w} = -2 + 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

(8) Todo cuaternión *no real* se puede escribir como $\mathbf{q} = a + e\mathbf{q}_0$ donde $a, e \in \mathbb{R}$ y $\mathbf{q}_0$ es un cuaternión *imaginario* tal que $\mathbf{q}_0^2 = -1$; explicad cómo. Utilizando esta descomposición, demostrad que, fijado un número natural $n \geq 3$, hay infinitos cuaterniones $\mathbf{q}$ que verifican $\mathbf{q}^n = 1$ e infinitos que verifican $\mathbf{q}^n = -1$ (*Indicación:* pensad en la analogía de los números complejos). Dad una raíz cúbica de $\mathbf{w} = 8$ que tenga todos sus coeficientes no nulos.

(9) Con la notación del apartado anterior, si $\mathbf{q}$ es *no real*, demostrad que para todo número natural n, $\mathbf{q}^n$ tiene su parte imaginaria también un múltiplo real de $\mathbf{q}_0$. Utilizad esta descomposición para ver que si $\mathbf{w}$ es un cuaternión *no real*, y $n \geq 3$, entonces hay exactamente n cuaterniones $\mathbf{q}$ que verifican $\mathbf{q}^n = \mathbf{w}$.